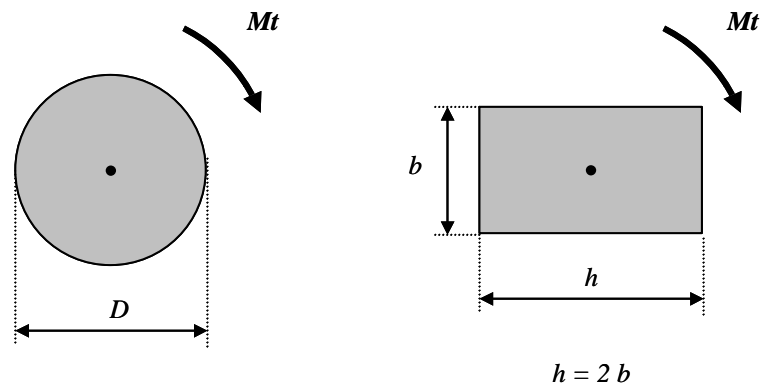


**Ejercicio N° 9- Enunciado**

Dadas dos barras de acero que poseen iguales áreas, siendo una de ellas de sección circular y la otra rectangular, las cuales soportan momentos torsores equivalentes y cuyos datos se indican en la figura 9.1 y tabla 9.1

**Figura 9.1**

$D$	$Mt$	$G$
$cm$	$kN\ cm$	$kN/cm^2$
4	60	$8\ 10^3$

**Tabla 9.1**

Se solicita determinar:

1. Las tensiones tangenciales máximas en ambas y las relaciones entre las mismas.
2. Los ángulos de torsión específicos y las relaciones entre los mismos.
3. La tensión tangencial máxima que ocurre en el lado menor de la sección rectangular.

**Ejercicio N° 9 - Resolución****1. Cálculo de las tensiones tangenciales máximas en ambas secciones y las relaciones entre las mismas.****1.1. Para la barra (C) de sección circular maciza:**

La tensión tangencial máxima será:

$$\tau_{zt\acute{m}ax(C)} = \frac{16 \cdot Mt}{\pi \cdot D^3}$$

Reemplazando por los valores

$$\tau_{zt\acute{m}ax(C)} = \frac{16 \cdot 60}{\pi \cdot 4^3}$$

$$\tau_{zt\acute{m}ax(C)} = 4,77 \cdot kN/cm^2$$

**1.2. Para la barra (R) de sección rectangular maciza (h = 2 b):**

Siendo ambas barras de áreas iguales:

$$F_C = F_R$$

Es decir:

$$\frac{\pi \cdot D^2}{4} = b \cdot (2 \cdot b)$$

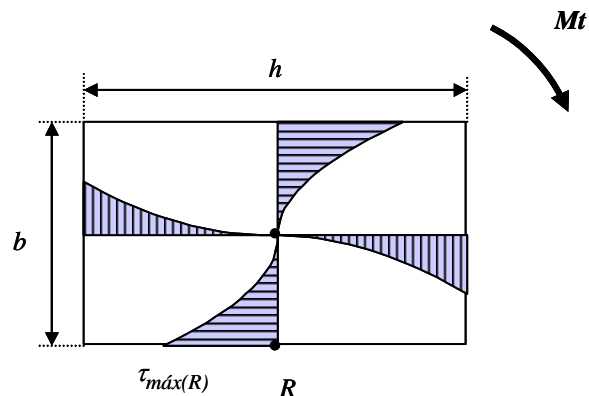
$$b = \sqrt{\frac{\pi \cdot D^2}{8}}$$

Reemplazando por los valores:

$$b \cong 2,5 \cdot cm$$

$$h \cong 5 \cdot cm$$

En este caso la tensión tangencial máxima  $\tau_{zt\acute{m}ax(R)}$  ocurre en el punto medio  $R$  del contorno externo del lado mayor  $h$ , como se observa en la figura 9.2.



**Figura 9.2**

$$\tau_{m\acute{a}x(R)} = \frac{Mt}{W_t^*}$$

Siendo:

$W_t^*$  : *Módulo resistente polar equivalente*

$$W_t^* = \frac{h \cdot b^2}{\alpha}$$

Siendo  $\alpha$  un coeficiente que depende de la relación ( $h/b$ ):

$$\alpha = f_1\left(\frac{h}{b}\right)$$

En el presente caso, para  $h/b = 2$ , de acuerdo con la respectiva tabla 9.2:

$$\alpha = 4,07$$

Reemplazando por los valores:

$$W_t^* = \frac{5 \cdot 2,5^2}{4,07} = 7,68 \cdot cm^3$$

En definitiva:

$$\tau_{m\acute{a}x(R)} = \frac{Mt}{W_t^*} = \frac{60}{7,68}$$

$$\tau_{m\acute{a}x(R)} = 7,81 \cdot \frac{kN}{cm^2}$$

### 1.3. Relación entre ambas tensiones:

$$K_\tau = \frac{\tau_{m\acute{a}x(R)}}{\tau_{m\acute{a}x(C)}}$$

Reemplazando por los valores:

$$K_\tau = \frac{7,81}{4,77}$$

$$K_\tau = 1,64$$

Dicha relación está indicando que para el problema planteado, a igualdad de momentos torsores y de áreas, para la relación ( $h = 2b$ ), la tensión tangencial máxima en la sección rectangular es aproximadamente un 64% superior a la correspondiente a la sección circular.

**2. Cálculo de los ángulos de torsión específico y de la relación entre ambos****2.1. Para la barra (C) de sección circular maciza:**

$$\theta_C = \frac{Mt}{G \cdot J_0}$$

$$\theta_C = \frac{32 \cdot Mt}{G \cdot \pi \cdot D^4}$$

Reemplazando valores:

$$\theta_C = \frac{Mt}{G \cdot J_0}$$

$$\theta_C = \frac{32 \cdot 60}{(8 \cdot 10^3) \cdot \pi \cdot 4^4} = \frac{1920}{6434 \cdot 10^3}$$

$$\theta_C = 0,2984 \cdot 10^{-3} \cdot \text{rad/cm}$$

**2.2. Para la barra (R) de sección rectangular maciza (h = 2 b):**

$$\theta_R = \frac{Mt}{G \cdot J_t^*}$$

Siendo:

$J_t^*$ : Momento de inercia polar equivalente

$$J_t^* = \frac{h \cdot b^3}{\beta}$$

Siendo  $\beta$  un coeficiente que depende de la relación ( $h/b$ )

$$\beta = f_2\left(\frac{h}{b}\right)$$

En el presente caso, para  $h/b = 2$ , de acuerdo a la respectiva tabla 9.2:

$$\beta = 4,37$$

Reemplazando por los valores:

$$J_t^* = \frac{5 \cdot 2,5^3}{4,37} = 17,88 \cdot \text{cm}^4$$

En definitiva:

$$\theta_R = \frac{Mt}{G \cdot J_t^*} = \frac{60}{(8 \cdot 10^3) \cdot 17,88} = \frac{60}{143,04 \cdot 10^3}$$

$$\theta_R = 0,4195 \cdot 10^{-3} \cdot \text{rad/cm}$$

### 2.3. Relación entre ambos ángulos de torsión específicos:

$$K_{\theta} = \frac{\theta_R}{\theta_C}$$

Reemplazando por los valores:

$$K_{\theta} = \frac{0,4195 \cdot 10^{-3}}{0,2984 \cdot 10^{-3}}$$

$$K_{\theta} = 1,41$$

Según dicha relación, para el caso planteado a igualdad de momentos torsores y de áreas, para la relación ( $h = 2 \cdot b$ ) el ángulo de torsión específico en la sección rectangular es aproximadamente un 41% superior al de la sección circular.

### 3. Cálculo de la tensión tangencial máxima en el lado menor de la sección rectangular

Como se observa en la figura 9.3, la tensión tangencial máxima  $\tau_{m\acute{a}x(K)}$  en el lado menor  $b$  de la sección rectangular está ubicada en el punto medio  $K$  de su contorno externo y está dada por la siguiente relación:

$$\tau_{m\acute{a}x(K)} = \varphi \cdot \frac{Mt}{W_t^*}$$

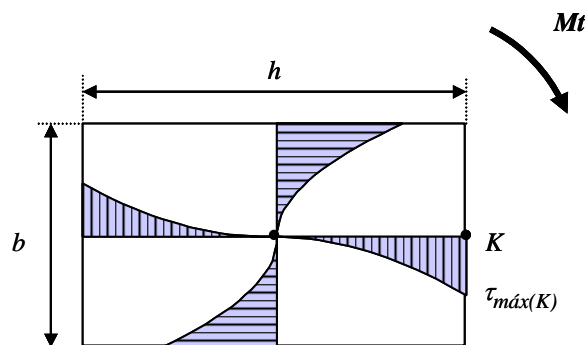


Figura 9.3

Siendo  $\varphi$  un coeficiente que depende de la relación ( $h/b$ ):

$$\varphi = f_3\left(\frac{h}{b}\right)$$

En el presente caso para ( $h/b = 2$ ), de acuerdo con la tabla 9.2:

$$\varphi = 0,795$$

Reemplazando por los respectivos valores:

$$\tau_{m\acute{a}x(K)} = 0,795 \cdot \frac{60}{7,68}$$

$$\tau_{m\acute{a}x(K)} = 6,21 \cdot \frac{kN}{cm^2}$$

$h/b$	$\alpha$	$\beta$	$\varphi$
1,00	4,80	7,11	1,000
1,50	4,33	5,11	0,859
1,75	4,18	4,67	0,820
2,00	4,07	4,37	0,795
2,50	3,88	4,02	0,766
3,00	3,74	3,80	0,753
4,00	3,55	3,56	0,745
6,00	3,35	3,35	0,743
8,00	3,26	3,26	0,742
10,00	3,20	3,20	0,742
$\infty$	3,00	3,00	0,742

Tabla 9.2

*Coefficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\varphi$  para torsión simple en secciones rectangulares*